

Klimamodelle für den Mathematikunterricht

FRANZ EMBACHER (UNIVERSITÄT WIEN | FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN)

Diese Textversion des Vortrags vom 5.4.2024 stellt einige grundlegende Begriffe, Größen, Beziehungen und Betrachtungen vor, die bei der Beschreibung des Klimas und des Klimawandels von Bedeutung sind. Im Vergleich zu der vorab auf meiner Homepage veröffentlichten Version Embacher (2024b) wurde hier Abschnitt 8 eingefügt, ansonsten sind die beiden Versionen weitgehend identisch. Die physikalischen Grundlagen werden nur angedeutet – mehr Information dazu und der eine oder andere ausführlichere Exkurs finden sich in Embacher (2024a). Hier werden vor allem solche Aspekte hervorgehoben, die speziell für den Mathematikunterricht interessant sind. Für die Vortragsfolien vom 5.4.2024 siehe Embacher (2024c). Die Listeraturliste am Ende des Artikels umfasst einige wertvolle und empfehlenswerte Ressourcen zu Klima und Klimawandel, auch solche, die nicht im Text zitiert sind.

1. Planet ohne Atmosphäre

Ein Planet wechselwirkt mit seiner Umwelt (zu der in erster Linie der Stern gehört, den er umrundet), sieht man von der Gravitationskraft ab, über elektromagnetische Strahlung. Er empfängt Strahlung typischerweise im kurzwelligigen (sichtbaren und ultravioletten) Bereich des Spektrums und gibt typischerweise Strahlung im langwelligigen (Infrarot-)Bereich des Spektrums (Wärmestrahlung) ab. Der einfachste Fall ist ein Planet ohne Atmosphäre (*bare planet*), der kugelförmig ist, sich um sich selbst dreht wie ein Kreisel und sich auf einer Kreisbahn um seinen Zentralstern bewegt.

Die von der Energieerhaltung geforderte Strahlungsbilanz (eingestrahelte Strahlungsleistung = abgestrahlte Strahlungsleistung) dieses Planeten wird durch die Beziehung

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha)S = \sigma T^4 \quad (1)$$

ausgedrückt. Dabei ist S die Leistung der pro Fläche auftreffenden kurzwelligigen Strahlung, wobei die Fläche normal zur Richtung der einfallenden Strahlen orientiert ist. (Für die Erde nennen wir diese Größe die Solarkonstante). α (die Albedo) ist der relative Anteil dieser Strahlung, der sofort wieder in den Weltraum zurückreflektiert und im Folgenden nicht mehr betrachtet wird. T ist die mittlere Oberflächentemperatur des Planeten, die im Modell so verwendet wird, als hätte der Planet auf seiner gesamten Oberfläche eben diese Temperatur T . Die rechte Seite von (1) ist die Leistung pro Fläche der Wärmestrahlung, die die Oberfläche emittiert. Sie beruht auf dem Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz, das in seiner einfachsten Version besagt, dass ein Körper mit Oberflächentemperatur T eine Strahlungsleistung pro Fläche von σT^4 aussendet. Dabei ist $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ die sogenannte Stefan-Boltzmann-Konstante.

Für den Mathematikunterricht interessant ist der unscheinbare Faktor $\frac{1}{4}$ in der Beziehung (1). Er kommt zustande, weil der Planet aus der vom Zentralstern stammenden Wellenfront einen Kreis herauschneidet, die Strahlungsleistung aber rechnerisch – im Sinne einer Mittelung – auf die gesamte Planetenoberfläche verteilt wird. Ist r der Radius des Planeten, so trifft insgesamt eine Strahlungsleistung $\pi r^2 S$ auf ihn, von der der relative Anteil α zurückreflektiert und daher nur der relative Anteil $1 - \alpha$ absorbiert wird. Da aber die gesamte Planetenoberfläche gemäß dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz Wärmestrahlung aussendet, ist die abgegebene Leistung $A \sigma T^4$, wobei A der gesamte Inhalt der Oberfläche ist. Auf diese Weise kommt die Formel $A = 4\pi r^2$ für die Kugeloberfläche ins Spiel – möglicherweise eine schöne Motivation für SchülerInnen, einen Nutzen in ihr zu erkennen. Die Leistungsbilanz lautet also

$$\pi r^2(1 - \alpha)S = 4\pi r^2 \sigma T^4. \quad (2)$$

Nach Division durch $4\pi r^2$ tritt der Planetenradius r nicht mehr auf – ein einfacher Trick, der alle weiteren Betrachtungen unabhängig von der tatsächlichen Größe des Planeten macht. Man betrachtet gewissermaßen einen („mittleren“ oder „typischen“) Quadratmeter der Planetenoberfläche – eine Vorgangsweise, die sich in der Einheit W/m^2 (Watt pro Quadratmeter) für S und einige weitere Größen, die in diesem

Text noch auftreten werden, bemerkbar macht, und ein Beispiel dafür, dass physikalische Einheiten nicht unnötiges Beiwerk bei Berechnungen sind, sondern uns inhaltlich etwas sagen. Der Faktor $\frac{1}{4}$ kommt also als das für sich schon bemerkenswert einfache (und „schöne“) Verhältnis von Kreisfläche zu Kugeloberfläche zustande.

Für Planeten, die keine oder kaum eine Atmosphäre besitzen, wie den Merkur, passt dieses Modell recht gut (siehe Embacher (2024a), S. 2 und Dessler (2022), S. 63). Wird versucht, es auf die Erde anzuwenden, für die $\alpha = 0.3$ und $S = 1361 \text{ W/m}^2$ bekannt ist, und löst man (1) nach T auf – ein Beispiel dafür, dass eine vierte Wurzel in einem für uns alle relevanten Zusammenhang auftreten kann –, so ergibt sich $T = 255 \text{ K} = -19^\circ\text{C}$, was eindeutig zu kalt ist! (Die mittlere globale Oberflächentemperatur der Erde beträgt $T = 288 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$.)

2. Atmosphärischer Treibhauseffekt (einige einfache Klimamodelle)

Die Erde ist wärmer als vom Modell des vorigen Abschnitts vorhergesagt, weil sie eine Atmosphäre besitzt, die Treibhausgase enthält. Diese Gase, die nur in geringen Mengen vorkommen (vor allem Wasserdampf, Kohlendioxid, Methan, Lachgas und Fluorchlorkohlenwasserstoffe), absorbieren und emittieren Wärmestrahlung. In Abbildung 1 ist ein einfaches Klimamodell skizziert, das illustriert, wie die Existenz solcher Gase für eine höhere Temperatur einer Planetenoberfläche sorgt, als dies ohne eine solche Atmosphäre der Fall wäre. Vereinfachend ist die Atmosphäre als eine Schicht idealisiert, die die einfallende Solarstrahlung ungehindert durchlässt, langwellige Wärmestrahlung aber komplett absorbiert und (in gleichen Teilen) nach oben und unten emittiert. Da der von der Oberfläche in den Weltraum zurück-

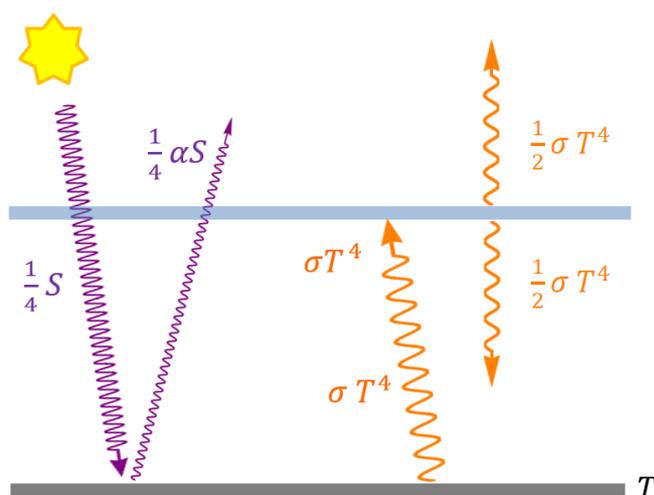


Abbildung 1: Strahlungsflüsse im Klimamodell mit einer Atmosphäre, die die kurzwellige Sonnenstrahlung ungehindert durchlässt, langwellige Wärmestrahlung aber komplett absorbiert und (in gleichen Teilen) nach oben und unten emittiert.

reflektierte Anteil $\frac{1}{4}\alpha S$ der Solarstrahlung in der Bilanz nicht mehr berücksichtigt werden muss, wird die eingestrahelte kurzwellige Leistung pro Fläche wie in (1) mit $\frac{1}{4}(1 - \alpha)S$ veranschlagt. Die Leistung pro Fläche der nach oben emittierten Wärmestrahlung, die in diesem Modell gänzlich von der Atmosphäre stammt, ist nun im Unterschied zu (1) nicht mehr σT^4 , sondern $\frac{1}{2}\sigma T^4$. Den Faktor $\frac{1}{2}$ schreiben wir als τ und nennen ihn den Transmissionsgrad der Atmosphäre. Er ist gleich dem Verhältnis der insgesamt eingestrahlenen (= insgesamt abgestrahlten) Leistung zu der von der Erdoberfläche in Form von Wärmestrahlung emittierten Leistung. Die Bilanzgleichung lautet damit

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha)S = \tau\sigma T^4 \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Der von der Atmosphäre nach unten emittierte Anteil der Wärmestrahlung heißt Gegenstrahlung und heizt die Oberfläche zusätzlich zur solaren Einstrahlung auf. Das ist der atmosphärische Treibhauseffekt.

Auf die Erde angewandt ergibt sich, indem (3) nach T aufgelöst wird, $T = 303\text{ K} = 30^\circ\text{C}$, was nun eindeutig zu warm ist. Der Treibhauseffekt der Erdatmosphäre ist also in Wirklichkeit ein bisschen schwächer als von (3) vorhergesagt.

Eine interessante Frage anlässlich dieses Modells wäre, ob damit der stärkstmögliche Treibhauseffekt beschrieben wird. Immerhin absorbiert die Atmosphäre die von der Erde emittierte Wärmestrahlung vollständig, und was wäre vollständiger als vollständig? Die Antwort: Nein, es gibt Situationen mit wesentlich stärkerem Treibhauseffekt. Man kann sie modellieren, indem mehrere Atmosphärenschichten in unterschiedlichen Höhen angebracht werden (siehe dazu auch Embacher (2024a), Abschnitt 4). Hier wird es wieder für den Mathematikunterricht interessant. Abbildung 2 zeigt eine solche Situation mit

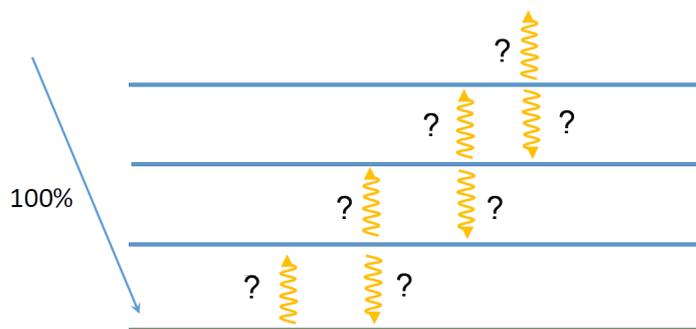


Abbildung 2: Atmosphäre mit 3 Schichten, die Wärmestrahlung vollständig absorbieren und (in gleichen Teilen) nach oben und unten emittieren. Dabei ist die von der Sonne eingestrahlte Leistung pro Fläche, $\frac{1}{4}(1 - \alpha)S$, als 100% veranschlagt. Für jede Schicht und für die Erdoberfläche ist die Energieerhaltung (erhaltene = abgegebene Leistung) zu erfüllen. Wie sind die nach oben und unten gerichteten Pfeile, die Wärmestrahlung repräsentieren, mit Prozentsätzen, die die Leistung pro Fläche angeben, zu beschriften? Welchen Wert hat der Transmissionsgrad τ in diesem Modell?

3 Schichten, reduziert auf ihren buchhalterischen Kern, indem $\frac{1}{4}(1 - \alpha)S$ als 100% veranschlagt wurden. Wie sind die Pfeile zu beschriften? Welchen Wert hat der Transmissionsgrad τ in diesem Modell? Abbildung 3 zeigt die Lösung. Der Transmissionsgrad ist hier $\tau = \frac{1}{4}$, da von der Oberfläche 400% ab-



Abbildung 3: Lösung: Man fängt am Besten oben an, betrachtet also die Energieerhaltung des Gesamtsystems, und arbeitet sich dann nach unten durch.

gestrahlt, von der obersten Atmosphärenschicht aber nur 100% an den Weltraum abgegeben werden. Man erkennt eindrucksvoll, dass die Leistung der Gegenstrahlung dreimal so groß ist wie die einfallende Solarstrahlung, und entsprechend warm ist es an der Oberfläche eines Planeten, dessen Klima durch ein solches Modell beschrieben wird. Es ist auch erkennbar, dass die Intensität der Wärmestrahlung nach oben abnimmt (und auch die Temperatur, doch das lassen wir hier beiseite). Stellt man sich die Wärmestrahlung als Ensemble von Photonen vor, so bildet jede Schicht eine Barriere, die Photonen schluckt

und für jedes geschluckte Photon ein Photon mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach oben oder unten abstrahlt. Alles in allem können solche Modellsituationen dazu beitragen, den Treibhauseffekt besser als nur oberflächlich zu verstehen.

Dieser Modelltyp kann auf n derartige Atmosphärenschichten verallgemeinert werden – eine nette Aufgabe für den Mathematikunterricht! Es ergibt sich ein Transmissionsgrad von

$$\tau = \frac{1}{n+1} \quad (4)$$

(siehe Dessler (2022), S. 62). Mit diesem Ergebnis steht nun ein freier Parameter zur Verfügung, sodass die Bilanzgleichung $\frac{1}{4}(1-\alpha)S = \tau\sigma T^4$ mit τ von (4) für einen Planeten mit bekannten Werten von α , S und T nach n gelöst werden kann. Für die Venus, die einen sehr starken Treibhauseffekt besitzt, ergibt sich der beeindruckende Wert $n = 82$. Die Erde bringt es auf lediglich $n = 0.65$, was einerseits besagt, dass der Treibhauseffekt der Erde – wie wir bereits wissen – weniger stark ausgeprägt ist als im Modell von Abbildung 1 ($n = 1$), andererseits aber didaktisch problematisch ist, denn was soll man sich unter 0.65 Schichten vorstellen? (Siehe dazu auch Dessler (2022), S. 63.)

Als Alternative kann ein Modell dienen, in dem die Atmosphäre als Schicht modelliert wird, die einen Teil der Wärmestrahlung ungehindert durchlässt. Es wird in Embacher (2024a), Abschnitt 5, ausführlich diskutiert, siehe auch IdTr (Stand 2024).

3. Globale Strahlungsbilanzgleichung

Die Energieerhaltung für das Klimasystem eines Planeten als Ganzes, sofern es sich im Gleichgewicht befindet, hat in allen bisher betrachteten Modellen die Form

$$\frac{1}{4}(1-\alpha)S = \tau\sigma T^4. \quad (5)$$

Wir wollen diese Beziehung die globale Strahlungsbilanzgleichung nennen und als Ausgangspunkt für die folgenden Abschnitte verwenden. Dabei verwenden wir den Transmissionsgrad τ als Maß für die Stärke des Treibhauseffekts.¹ Siehe dazu auch Embacher (2024a), Abschnitt 3.

Die Werte von Albedo, Solarkonstante, Transmissionsgrad und globaler mittlerer Oberflächentemperatur für den gegenwärtigen Klimazustand der Erde (der allerdings aufgrund des Klimawandels nur näherungsweise ein Gleichgewichtszustand ist) sind $\alpha = 0.3$, $S = 1361 \text{ W/m}^2$, $\tau = 0.61$ und $T = 288 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$.

4. Zusammenspiel von Eis und Albedo

Da Eis- und Schneeflächen eine hohe Albedo besitzen und die Menge an Eis und Schnee auf der Erde von der Temperatur abhängt (je kälter, umso mehr Eis und Schnee, je wärmer, umso weniger Eis und Schnee), ist die Albedo eine Funktion der Temperatur. Das berücksichtigend, schreiben wir die globale Strahlungsbilanzgleichung in der Form

$$\frac{1}{4}(1-\alpha(T))S = \tau\sigma T^4 \quad (6)$$

an, wobei α nun eine vorgegebene Funktion ist. In der Geschichte der Klimaforschung sind etliche unterschiedliche Vorschläge für diese Funktion gemacht worden (siehe etwa Stocker (2011), Abschnitt 2.4.1; North and Kim (2017), Abschnitt 2.4.1; sowie in Archer and Pierrehumbert (2013) das Paper von W. D. Sellers, S. 309.), letztlich ist man auf plausible Annahmen angewiesen. Abbildung 4 zeigt eine solche Funktion. Dieser Ansatz macht (6) zu einer transzendenten Gleichung für T . Die Methode der Wahl, sie zu lösen, besteht darin, die Graphen der linken und der rechten Seite zu plotten. Das Ergebnis ist in

¹ Den Transmissionsgrad als Maß für die Stärke des Treibhauseffekts zu verwenden, ist nicht alternativlos. Siehe den Anhang zu diesem Text für ein verbessertes Modell, das die Stärke des Treibhauseffekts anders misst, aber eine Variable mehr besitzt und daher geringfügig komplexer ist.

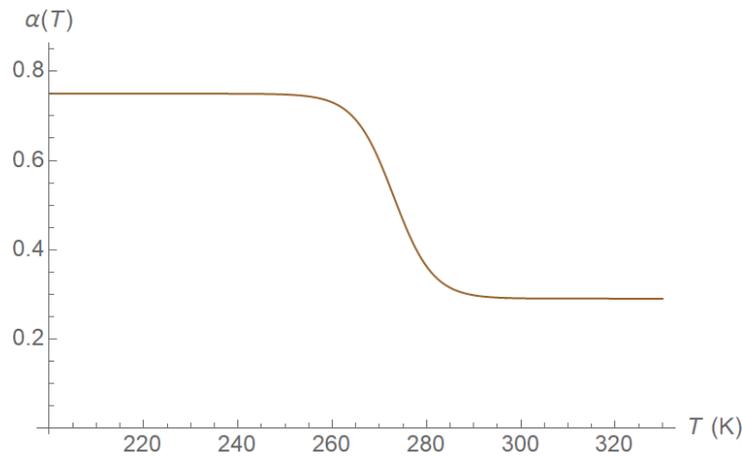


Abbildung 4: Einfaches Modell für die mittlere Albedo der Erde als Funktion der mittleren Oberflächentemperatur. Für derartige Modellierungen wird oft der *Tangens hyperbolicus* herangezogen. Die dargestellte Kurve ist der Graph der Funktion

$$\alpha(T) = \alpha_- + \frac{1}{2}(\alpha_+ - \alpha_-) \left(1 + \tanh(\gamma(T - T_m)) \right)$$

mit $\alpha_- = 0.75$, $\alpha_+ = 0.29$, $\gamma = 0.12 \text{ K}^{-1}$ und $T_m = 273 \text{ K}$. Für die heutige mittlere Oberflächentemperatur von 288 K ergibt sich als Wert der mittleren Albedo 0.3.

Abbildung 5 zu sehen. Überraschung! Es gibt nicht nur einen, sondern gleich drei Schnittpunkte! Jeder Schnittpunkt entspricht (gemäß dem Modell) einem Gleichgewichtszustand.

Für den Mathematikunterricht besonders interessant ist eine (idealerweise von SchülerInnen selbst) durchgeführte Stabilitätsanalyse: Welche dieser Gleichgewichtszustände sind stabil, welche sind instabil? Stabil bedeutet, dass ein Klimazustand, dessen Temperatur ein bisschen von einer der Gleichgewichtstemperaturen abweicht, in dieses Gleichgewicht zurückgezogen wird. Wird er vom Gleichgewichtszustand weggetrieben, ist dieser instabil. Eine solche Analyse ist zwar im Grunde ganz leicht und funktioniert ohne jegliche Rechnung, das geeignete Argument zu finden, mag aber für SchülerInnen doch ein bisschen schwierig sein.

Das Argumentationsmuster ist folgendes: Ist das Klimasystem im Gleichgewichtszustand mit der höchsten Temperatur (entsprechend dem rechtesten Schnittpunkt, der das heutige Klima repräsentiert), und steigt T (aus welchem Grund immer) etwas an, so liegt bei dieser höheren Temperatur der Graph von $\tau\sigma T^4$ (Abstrahlung) höher als jener von $\frac{1}{4}(1 - \alpha)S$ (Einstrahlung). Das bedeutet, dass die Abstrahlung überwiegt – die Erde gibt mehr Energie ab als sie bekommt, die Temperatur wird fallen, und das Klimasystem nähert sich wieder dem Gleichgewichtszustand an. Ist umgekehrt die Temperatur kleiner als im Gleichgewichtszustand, so sind die Rollen der beiden Graphen vertauscht, die Einstrahlung überwiegt, die Temperatur steigt, sodass sich das Klimasystem auch in diesem Fall wieder dem Gleichgewichtszustand annähert. Somit ist dieser Gleichgewichtszustand stabil. Analog zeigt man, dass der mittlere Schnittpunkt einem instabilen Gleichgewicht entspricht und der linke wieder einem stabilen (siehe Abbildung 6).

Demnach gibt es (in unserem Modell – Modelle bitte nie mit der Wirklichkeit verwechseln!) zwei mögliche stabile Zustände des Erdklimas, den heutigen und einen wesentlich kälteren, bei dem praktisch die gesamte Erde zugefroren ist. Tatsächlich gibt es geologische Hinweise darauf, dass sich die Erde mehrere Male, vor ca. 700 Millionen Jahren und vor ca. 2.5 Milliarden Jahren, jeweils etliche Millionen Jahre lang in einem solchen Zustand (Schneeball Erde, *snowball earth*) befunden hat.

Wie könnte die Erde in einen solchen Zustand gelangt sein? Vielleicht durch eine lange Epoche massiver Vulkanausbrüche, die zu einem starken Anstieg der Konzentration von Aerosolen in der Stratosphäre und damit zu einem Anstieg der Albedo geführt hat. Nehmen wir an, dass dadurch $1 - \alpha(T)$ für jedes T

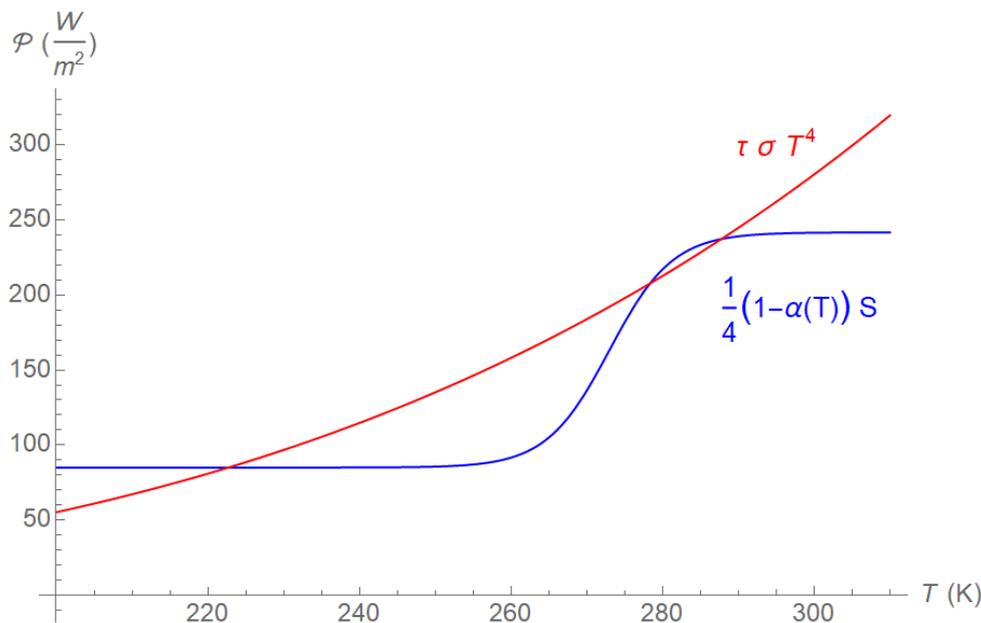


Abbildung 5: Die Graphen der linken und der rechten Seite von Gleichung (6) mit der Albedo von Abbildung 4. Für S und τ wurden die heutigen Werte verwendet.

gleichermaßen, sagen wir um 5%, kleiner wird. Was ändert sich dann im Vergleich zu Abbildung 5? Der Graph der Kurve, der die Einstrahlung darstellt, wird ein bisschen gestaucht, während die andere Kurve bleibt, wo sie ist. Diese neue Situation ist in Abbildung 7 dargestellt. Nur mehr ein einziger Gleichgewichtszustand ist möglich! Kurz vor der Momentaufnahme, die die Abbildung zeigt, müssen die beiden Kurven einander berührt haben – es lag dann ein Kippunkt (*tipping point*) vor, nach dessen Überschreitung es kein Zurück mehr gab und das Klima sich auf einen *gänzlich anderen* Zustand zubewegte – in Richtung Schneeball Erde! Dass die Erde durch eine geringfügige Absenkung der solaren Einstrahlung in einen stabilen, extrem kalten Zustand abrutschen könnte, wurde bereits Ende der 1960er-Jahre entdeckt. Siehe dazu in Archer and Pierrehumbert (2013) das Paper von M. I. Budyko, S. 287, und das Paper von W. D. Sellers, S. 309. Die Details eines möglichen Schneeball-Erde-Zustands und wie unser Planet dorthin und wieder zurück gekommen sein könnte, sind Gegenstand aktueller Forschung.

5. Äußere Einwirkungen und Rückkopplungen im Klimasystem (Überblick)

Kehren wir nach diesem Ausflug in das Paläoklima wieder zurück zum Heute und zum aktuellen Klimawandel. Wir werden nun der Klimawissenschaft ein bisschen (ein ganz kleines bisschen) in die Karten schauen und beginnen mit der Frage: Wie reagiert das Klima (insbesondere die Oberflächentemperatur) auf Störungen? Dabei müssen wir zwischen zwei Arten von Ursachen unterscheiden:

- Äußere Einwirkungen (Antriebe, *forcings*) sind Einflüsse, die von außerhalb des eigentlichen Klimasystem kommen, beispielsweise
 - die Freisetzung von Treibhausgasen wie Kohlendioxid durch die Nutzung fossiler Brennstoffe (die den Treibhauseffekt verstärkt, also τ verkleinert),
 - die Freisetzung von Aerosolen in die höheren Atmosphärenschichten (die die Rückstrahlung verstärkt, also α vergrößert),
 - die Änderung der Landnutzung (etwa die Umwandlung von Wäldern in Weide- und Ackerland, die ebenfalls die Rückstrahlung verstärkt, aber andererseits durch die Abholzung einen Kohlendioxid-Speicher vernichtet und dadurch den Treibhauseffekt verstärkt)
 - oder eine Änderung der Sonnenaktivität (die S verändert).

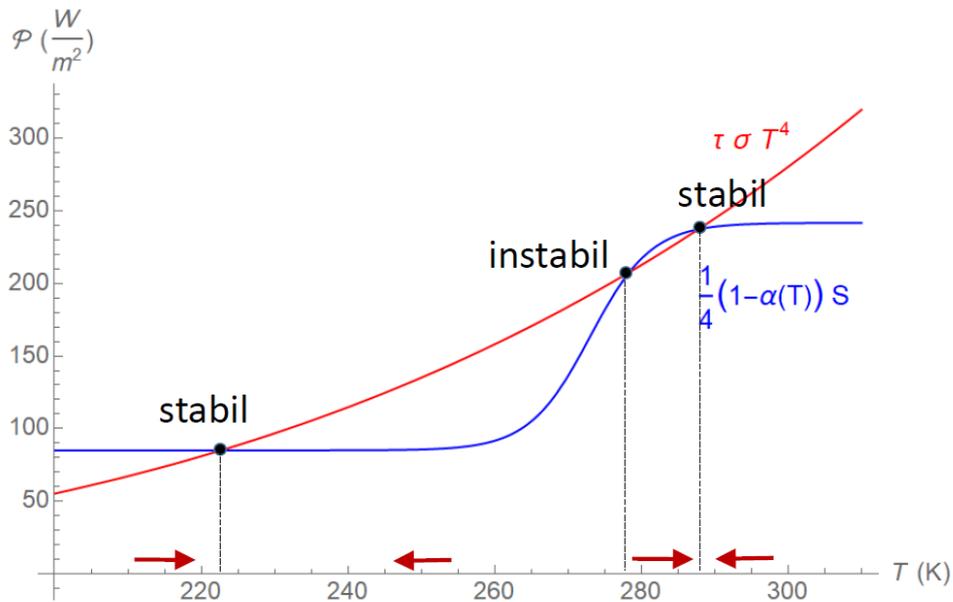


Abbildung 6: Ergebnis der Stabilitätsanalyse der drei Gleichgewichtszustände.

- Rückkopplungen (*feedbacks*) sind Prozesse, die durch Temperaturänderungen angestoßen werden. Die wichtigsten „schnellen“ Rückkopplungen im Klimasystem der Erde sind:
 - Wasserdampf-Rückkopplung: Je wärmer, umso mehr Wasserdampf in der Luft, umso wärmer (da Wasserdampf ein Treibhausgas ist), daher umso mehr Wasserdampf, daher umso wärmer, usw. Positive Rückkopplung, da sie eine anfängliche Temperaturänderung verstärkt.
 - Eis-Albedo-Rückkopplung: Je wärmer, umso weniger Eis und Schnee (was die Albedo verkleinert), daher umso wärmer, daher umso weniger Eis und Schnee, daher umso wärmer, usw. Positive Rückkopplung.
 - Wolkenrückkopplung: Je wärmer, umso mehr Wasserdampf in der Luft, daher umso mehr Wolken, die einerseits die Albedo vergrößern (abkühlender Effekt), andererseits mehr Sonnenlicht absorbieren und Wärmestrahlung emittieren (wärmender Effekt). Hier besteht in der Klimaforschung die größte Unsicherheit, da sich auch die Beschaffenheit und Höhe der Wolken mit zunehmender Temperatur ändert. Nach dem gegenwärtiger Stand des Wissens eine positive Rückkopplung.
 - Temperaturgradient-Rückkopplung (*lapse rate*-Rückkopplung): Je wärmer, umso mehr Wasserdampf in der Luft, und umso weniger stark ist die Abnahme der Temperatur mit der Höhe (da durch Verdunstung und Kondensation Energie von der Meeresoberfläche in die Atmosphäre transportiert wird), daher umso mehr Abstrahlung in den Weltraum. Negative Rückkopplung, da sie eine anfängliche Temperaturänderung abschwächt.

Neben den „schnellen“ gibt es auch „langsame“ Rückkopplungen wie das Abschmelzen der Antarktis und Grönlands, das Auftauen von Permafrostböden (das große Mengen von Methan freisetzt) oder Änderungen der Vegetationszonen und damit der Albedo sowie der Austauschraten von Kohlendioxid zwischen Atmosphäre, Biosphäre und Ozean.

Wenn in den nächsten zwei Abschnitten gefragt wird, wie „das Klima“ auf äußere Einwirkungen reagiert, so interessiert uns dabei vor allem, wie sich die globale mittlere Oberflächentemperatur langfristig ändern wird. Das liegt an zwei Gründen: Einerseits ist die globale mittlere Oberflächentemperatur T bzw. deren langfristige Änderung ΔT eine Kennzahl, die weltweit bei der Formulierung von Klimazielen und Klimaabkommen genutzt werden kann. Andererseits hängt sehr viel genau von dieser einen Kennzahl ab, vom Anstieg des Meeresspiegels über die Größe der Gebiete, die zu heiß zum Überleben sein werden

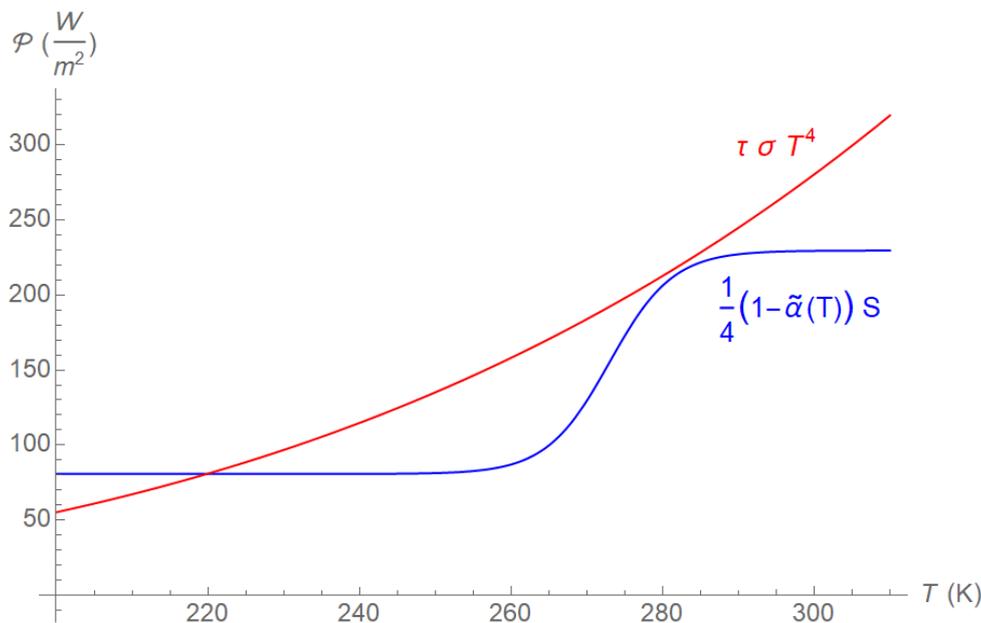


Abbildung 7: Die Graphen der linken und der rechten Seite der globalen Strahlungsbilanzgleichung mit Albedo $\tilde{\alpha}(T)$, definiert durch $1 - \tilde{\alpha}(T) = 0.95 \cdot (1 - \alpha(T))$, wobei $\alpha(T)$ die Albedo von Abbildung 4 ist. Im Vergleich zu der in Abbildung 5 dargestellten Situation wird nun um 5% weniger kurzwellige Solarstrahlung vom Klimasystem aufgenommen. (Diese Situation ist äquivalent zu einer Abnahme der Solarkonstante um 5%.)

bis zur Faustregel, dass die Erwärmung im Alpenraum immer ungefähr doppelt so groß ausfällt wie im globalen Mittel.

6. Strahlungsantrieb und No-feedback-Klimasensitivität

Wie reagiert das Klima auf Störungen? Wir werden in diesem Abschnitt zuerst den für die Klimawissenschaft zentralen Begriff des Strahlungsantriebs definieren und uns dann ansehen, wie Störungen zu Temperaturänderungen führen, zunächst ohne Berücksichtigung von Rückkopplungen. Im nächsten Abschnitt werden wir erfahren, wie sich Rückkopplungen auswirken.

Eine für das Klima zentrale Größe, die im Folgenden eine wichtige Rolle spielen wird, ist die Differenz von eingestrahelter und abgestrahlte Leistung pro Fläche

$$\mathcal{B} = \frac{1}{4}(1 - \alpha)S - \tau\sigma T^4, \quad (7)$$

also die Netto-Energie pro Zeitintervall und Fläche, die in das Klimasystem der Erde fließt. Eine wirklich schöne Bezeichnung für diese Größe gibt es nicht, wir nennen sie das Strahlungsbudget (*radiation budget* oder *energy imbalance*). Für einen Gleichgewichtszustand gilt $\mathcal{B} = 0$, der heutige Wert des Strahlungsbudgets liegt bei knapp 1 W/m^2 .

Falls sich nun das Klima anfänglich in einem Gleichgewichtszustand befindet und in einem bestimmten Zeitraum äußere Einwirkungen stattfinden, etwa die Freisetzung von Kohlendioxid aus fossilen Brennstoffen, so wird sich das Strahlungsbudget zunächst ändern. Im Fall einer Erhöhung der Kohlendioxidkonzentration wird es ansteigen, da weniger abgestrahlt als eingestrahlt wird. Dadurch wird sowohl die Erdoberfläche als auch die Atmosphäre wärmer. Als Folge strahlt die Erde mehr Leistung ab als zuvor, was das Strahlungsbudget tendenziell wieder kleiner werden lässt. Während des Zeitraums, in dem diese äußeren Einwirkungen stattfinden, erfährt \mathcal{B} also zwei Tendenzen, die gleichzeitig wirken. Erst wenn die äußeren Einwirkungen zum Stillstand gekommen sind, wird \mathcal{B} kontinuierlich kleiner, bis sich (im Modell asymptotisch für $t \rightarrow \infty$) ein neuer Gleichgewichtszustand einstellt, aber mit einer höheren

Temperatur als zu Beginn. Dieses gleichzeitige Wirken zweier entgegengesetzter Tendenzen macht die Sachlage ein bisschen kompliziert, und daher verwendet die Klimawissenschaft einen Trick: Die äußeren Einwirkungen, um die es geht, werden so modelliert, als fänden sie zu einem bestimmten Zeitpunkt statt. Der Strahlungsantrieb (*radiative forcing*) RF ist dann definiert als die sprunghafte Änderung des Strahlungsbudgets:

$$\text{RF} = \mathcal{B}_{\text{nachher}} - \mathcal{B}_{\text{vorher}}. \quad (8)$$

Wichtig ist, dass die Temperatur in diesem Augenblick keine Zeit hat, sich anzupassen, d.h. $\mathcal{B}_{\text{vorher}}$ (was in unserem Szenario gleich 0 ist) und $\mathcal{B}_{\text{nachher}}$ gehören zu Klimazuständen mit der gleichen Temperatur T . Der so definierte Strahlungsantrieb lässt sich relativ leicht bestimmen (auch in Klimamodellen, die wesentlich komplexer sind als das hier betrachtete und auf Supercomputern laufen), denn er erfordert nur eine Neuadjustierung der Strahlungsverhältnisse, aber keinerlei Blick in die Zukunft, und wie wir sehen werden, ist er einer der Faktoren, die die langfristig zu erwartende Temperaturänderung bestimmen. (In Klammer sei erwähnt, dass der durch (8) definierte Strahlungsantrieb auch Sinn macht, wenn das Klimasystem anfänglich nicht im Gleichgewicht ist, also wenn $\mathcal{B}_{\text{vorher}} \neq 0$ ist.)

Beginnen wir mit einem Gleichgewichtszustand $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$. In unserem auf (7) beruhenden Modell kann eine zu einem Zeitpunkt stattfindende äußere Einwirkung abrupte Änderungen von α , S und τ verursachen, also Änderungen $\Delta\alpha$, ΔS und $\Delta\tau$. Im Folgenden nehmen wir an, dass alle mit Δ bezeichneten Größen klein sind, sodass ihre Produkte und Quadrate vernachlässigt werden können. Insbesondere ist (wieder nicht uninteressant für den Mathematikunterricht) $\Delta((1 - \alpha)S) = -\Delta\alpha S_0 + (1 - \alpha_0)\Delta S$, was ganz ohne Differentialrechnung so begründet werden kann:

$$(1 - \alpha_0 - \Delta\alpha)(S_0 + \Delta S) = (1 - \alpha_0)S_0 - \Delta\alpha S_0 + (1 - \alpha_0)\Delta S + \dots, \quad (9)$$

wobei der nicht angegebene Term – er ist von „höherer Ordnung“ – vernachlässigt wird. Damit berechnen wir (wobei noch einmal betont sei, dass die Temperatur *nicht* variiert wird)

$$\text{RF} = -\frac{1}{4}\Delta\alpha S_0 + \frac{1}{4}(1 - \alpha_0)\Delta S - \Delta\tau\sigma T_0^4. \quad (10)$$

Hier stoßen wir auf ein sachlogisches Problem für den Unterricht, das eine kleine Abschweifung rechtfertigt.

Kleiner Exkurs zum Strahlungsantrieb: Während man sich Änderungen $\Delta\alpha$ und ΔS mehr oder weniger gut vorstellen kann, kommen Änderungen der Kohlendioxidkonzentration, die wichtigsten äußeren Einwirkungen des heutigen Klimawandels, nicht in der Form $\Delta\tau$ daher. Eine bestimmte Änderung der Kohlendioxidkonzentration mit Hilfe der physikalischen Details von Absorption und Emission von Wärmestrahlung in den entsprechenden Strahlungsantrieb umzurechnen, übersteigt die Möglichkeiten des Unterrichts. Daher sei hier erwähnt, wie diese Lücke durch einige (im Detail im Unterricht nicht zu begründende) Mitteilungen an die SchülerInnen überbrückt werden kann.

Die CO_2 -Konzentration in der Atmosphäre wird (bezogen auf die Teilchenzahl) meist in ppm (*parts per million*) angegeben. Am Ende der vorindustriellen Zeit (das meist um 1750 angesetzt wird) betrug sie 280 ppm (d.h. auf eine Million Luftmoleküle fielen damals 280 CO_2 -Moleküle) und ist bis heute auf etwa 420 ppm angestiegen, das ist eine Zunahme um 50%. Die Klimaforschung hat durch den Einsatz von Computermodellen eine Formel für den Strahlungsantrieb gewonnen, den eine Änderung der CO_2 -Konzentration von $C_{\text{CO}_2,0}$ auf $C_{\text{CO}_2,1}$ bewirkt:

$$\text{RF} = 5.35 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \ln\left(\frac{C_{\text{CO}_2,1}}{C_{\text{CO}_2,0}}\right). \quad (11)$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Formel reicht bis in Größenordnungen von 3000 ppm. Unter Verwendung von (10) mit $\Delta\alpha = \Delta S = 0$ und $T_0 = 288 \text{ K}$ kann daraus ganz leicht ein Zusam-

menhang zwischen einer (kleinen) Änderung der CO₂-Konzentration und der entsprechenden Änderung des Transmissionsgrads gewonnen werden:

$$\Delta\tau = -0.0137 \ln\left(\frac{C_{\text{CO}_2,1}}{C_{\text{CO}_2,0}}\right) \approx -0.0137 \frac{\Delta C_{\text{CO}_2}}{C_{\text{CO}_2,0}}. \quad (12)$$

(Dabei wurde die Näherungsformel $\ln(1+x) \approx x$ für $|x| \ll 1$ verwendet – wieder ein Thema speziell für den Mathematikunterricht.)

Oft wird die Verdopplung der CO₂-Konzentration vom vorindustriellen Wert auf 560 ppm (einen Wert, der vermutlich noch in diesem Jahrhundert überschritten werden wird) herangezogen, um die Vorhersagen von Modellen zu vergleichen. Der entsprechende Strahlungsantrieb lässt sich mit (11) leicht berechnen:

$$\text{RF}_{2\times\text{CO}_2} = 5.35 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \ln(2) = 3.7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (13)$$

Derzeit steigt die CO₂-Konzentration um etwas mehr als 2 ppm pro Jahr.

Um Strahlungsantriebe, die von einer bestimmten Änderung der Albedo oder (hypothetisch) der Sonnenaktivität bewirkt werden, zu berechnen, ist ein solcher Aufwand nicht nötig, da (10) dann direkt verwendet werden kann. Apropos Sonnenaktivität: Ja, die Sonnenaktivität zeigt mehr oder weniger regelmäßige Schwankungen (vor allem den Schwabe-Zyklus mit einer Periode von 11 Jahren), diese liegen aber in der Größenordnung von lediglich einem Zehntel Prozent und sind *nicht* die Ursache für den Klimawandel.

Zum Abschluss dieses Exkurses noch eine nützliche Information: Die Summe der Strahlungsantriebe aller von Menschen verursachten Einwirkungen auf das Klima zwischen dem Ende der vorindustriellen Zeit und dem Jahr 2019 wird mit 2.7 W/m² geschätzt, die Summe der Strahlungsantriebe bis 2022 mit 2.9 W/m². Die beiden betragsmäßig größten Anteile der letzten Zahl stammen mit 2.25 W/m² von CO₂-Emissionen und mit –1 W/m² von der Freisetzung von Aerosolen. (Falls Sie jetzt hellhörig geworden sind: Ja, man kann Strahlungsantriebe von Einwirkungen, die zu verschiedenen Zeiten stattfinden, addieren, sofern die Änderungen klein sind und man an der langfristigen Erderwärmung interessiert ist.) Siehe auch IPCC (Stand 2023).

Nun sind wir soweit, um uns die Reaktion des Klimas (vor allem der Temperatur) auf eine Störung ansehen zu können. Wir gehen aus von einem Gleichgewichtszustand $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$. Durch eine äußere Einwirkung mit einem bestimmten Strahlungsantrieb RF wird der Klimazustand aus dem Gleichgewicht gebracht. In der Folge passt sich die Temperatur den neuen Gegebenheiten (etwa einer vergrößerten Menge an Kohlendioxid in der Atmosphäre, einer geänderten Albedo oder – hypothetisch – einer stärker oder schwächer strahlenden Sonne) an, sodass das System asymptotisch einem neuen Gleichgewichtszustand zustrebt, für den, ebenso wie für den Anfangszustand, $\mathcal{B} = 0$ gilt. Die gesamte Änderung des Strahlungsbudgets, die demnach gleich 0 ist, spalten wir auf in die anfängliche sprunghafte Änderung (bei konstanter Temperatur), die den Strahlungsantrieb darstellt, und in die nachfolgende langsame Anpassung. In einem ersten Herangehen wird diese nachfolgende langsame Anpassung unter Vernachlässigung von Rückkopplungen betrachtet, d.h. es passt sich nur die Temperatur T an, während α , S und τ die Werte, die sie nach der äußeren Einwirkung bekommen haben, beibehalten. Formal sieht das so aus:

$$\Delta\mathcal{B} = \underbrace{\Delta\mathcal{B}|_{T=T_0}}_{\text{RF}} - \tau\sigma \underbrace{\Delta(T^4)}_{4T_0^3\Delta T} = 0, \quad (14)$$

wobei die Umformung von $\Delta(T^4)$ wieder ganz ohne Differentialrechnung bewerkstelligt werden kann:

$$(T_0 + \Delta T)^4 = T_0^4 + 4T_0^3\Delta T + \dots, \quad (15)$$

wobei die nicht angegebenen Terme – sie sind alle von „höherer Ordnung“ – vernachlässigt werden. (14) nimmt also die Form

$$RF - 4\tau_0 \sigma T_0^3 \Delta T = 0 \quad (16)$$

an. Wir lösen nach ΔT auf und nennen das Ergebnis ΔT_{nf} (für *no feedback*). Gäbe es keine Rückkopplungen, so wäre die langfristige zu erwartende Änderung der Temperatur durch

$$\Delta T_{\text{nf}} = \frac{1}{4\tau_0 \sigma T_0^3} RF \quad (17)$$

gegeben. Wir schreiben dieses Ergebnis in der Form

$$\Delta T_{\text{nf}} = \lambda_{\text{nf}} RF \quad (18)$$

an. Die Konstante

$$\lambda_{\text{nf}} = \frac{1}{4\tau_0 \sigma T_0^3} \quad (19)$$

heißt No-feedback-Klimasensitivitätsparameter, kurz No-feedback-Klimasensitivität (*no-feedback climate sensitivity parameter*). Für die Werte des heutigen Erdklimas finden wir sogleich

$$\lambda_{\text{nf}} = 0.3 \frac{\text{K}}{\text{W/m}^2}. \quad (20)$$

Hier haben wir wieder ein schönes Beispiel dafür, dass physikalische Einheiten das Verständnis erleichtern können, denn man kann (20), also „0.3 Kelvin pro W/m^2 “, so lesen: Für jedes W/m^2 Strahlungsantrieb ergibt sich, wenn Rückkopplungen vernachlässigt werden, eine Temperaturerhöhung von 0.3 K.

Hier ein Rechenbeispiel, das die Anwendung von (18) illustriert: Steigt die Aktivität der Sonne um ein Prozent, ist also $\Delta S = 0.01 S_0$, so ist gemäß (10) mit $\Delta \alpha = \Delta \tau = 0$ der zugehörige Strahlungsantrieb gegeben durch $RF = 2.38 \text{ W/m}^2$, was mit (18) und (20) auf eine No-feedback-Temperaturerhöhung von $\Delta T_{\text{nf}} = 0.7^\circ\text{C}$ führt. Möchte man derartige Aussagen im Zusammenhang mit der Kohlendioxidkonzentration machen, so erweisen sich die Informationen, die im obigen Exkurs gegeben wurden, als nützlich.

Die Herleitung von (18) zeigt, dass die von einer äußeren Einwirkung bewirkte No-feedback-Temperaturänderung in unserem Modell nur vom Strahlungsantrieb, nicht aber von der konkreten Art der Einwirkung abhängt. In komplexeren und realistischeren Klimamodellen gilt das nicht ganz durchgängig, und es gibt Ausnahmen, aber dennoch ist der Strahlungsantrieb ein Konzept, das in der Klimaforschung eine wichtige Rolle spielt.²

7. Einbeziehung von Rückkopplungen

Wir beginnen wieder mit einem Gleichgewichtszustand $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$, und wie bisher seien alle mit einem Δ bezeichneten Größen klein, sodass ihre Produkte und Quadrate vernachlässigt werden können. Nun nehmen wir an, dass eine Erhöhung der Konzentration eines Treibhausgases eine (sprunghaft modellierte) Änderung von τ bewirkt. Als Beispiel für eine Rückkopplung betrachten wir die Eis-Albedo-Rückkopplung. Da Eis langsam schmilzt (zumindest stellen wir uns das so vor), fällt es leicht, den Prozess, der nun in Gang kommt, gedanklich in eine Abfolge von Einzelschritten zu zerlegen:

- Die Erhöhung der Konzentration eines Treibhausgases bewirkt

$$(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0) \rightarrow (\alpha_0, S_0, \tau_1 = \tau_0 + \Delta\tau, T_0). \quad (21)$$

Der Transmissionsgrad wird während des gesamten Prozesses seinen Wert τ_1 beibehalten.

² Am Rande sei angemerkt, dass es in der Klimaforschung verschiedene Vorschriften zur genauen Berechnung des Strahlungsantriebs mittels Computermodellen gibt, die auf geringfügig unterschiedliche Werte führen. Die Details dazu gehen über den Horizont dieses Textes hinaus.

- Die Temperatur passt sich den neuen Verhältnissen an, aber da Eis nur langsam schmilzt, hat die Albedo vorerst noch ihren alten Wert α_0 , was bedeutet, dass die Temperaturerhöhung zunächst ohne Rückkopplung stattfindet und das System einem vorübergehenden Gleichgewicht zustrebt:

$$(\alpha_0, S_0, \tau_1, T_0) \rightarrow (\alpha_0, S_0, \tau_1, T_1 = T_0 + \Delta T_{\text{nf}}), \quad (22)$$

wobei ΔT_{nf} wie in (18) berechnet wird.

- Da im Laufe der Zeit doch nennenswerte Mengen von Eis geschmolzen sind, ändert sich auch die Albedo. Wir wollen näherungsweise annehmen, dass die Abhängigkeit der Albedo von der Temperatur von der Form

$$\alpha(T) = \alpha_0 + q(T - T_0) \quad (23)$$

ist, mit einer Konstante $q < 0$. Als Folge der Erhöhung der Temperatur von T_0 auf $T_1 = T_0 + \Delta T_{\text{nf}}$ ändert sich die Albedo von α_0 auf $\alpha_1 = \alpha(T_1) = \alpha_0 + q\Delta T_{\text{nf}}$, also ändert sich der Klimazustand gemäß

$$(\alpha_0, S_0, \tau_1, T_1) \rightarrow (\alpha_1, S_0, \tau_1, T_1). \quad (24)$$

- Durch die gesunkene Albedo reagiert in der Folge wieder die Temperatur, und es stellt sich ein neues vorübergehendes Gleichgewicht ein:

$$(\alpha_1, S_0, \tau_1, T_1) \rightarrow (\alpha_1, S_0, \tau_1, T_2 = T_1 + \Delta T_1). \quad (25)$$

Nun berechnen wir ΔT_1 , indem wir $\alpha_1 = \alpha_0 + q\Delta T_{\text{nf}}$ und $T_2 = T_1 + \Delta T_1$ in die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_1)S_0 = \tau_1 \sigma T_2^4 \quad (26)$$

einsetzen, ausmultiplizieren, die Regel für den Umgang mit kleinen Größen und die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0)S_0 = \tau_0 \sigma T_0^4 \quad (27)$$

verwenden, um schließlich als Ergebnis zu finden:

$$\Delta T_1 = g \Delta T_{\text{nf}} \quad \text{mit} \quad g = -\frac{q S_0}{16 \tau_0 \sigma T_0^3}. \quad (28)$$

- Und so geht es weiter: Als Folge des neuerlichen Temperaturanstiegs ändert sich die Albedo,

$$(\alpha_1, S_0, \tau_1, T_2) \rightarrow (\alpha_2 = \alpha(T_2), S_0, \tau_1, T_2), \quad (29)$$

- und die Temperatur zieht wieder nach,

$$(\alpha_2, S_0, \tau_1, T_2) \rightarrow (\alpha_2, S_0, \tau_1, T_3 = T_2 + \Delta T_2), \quad (30)$$

wobei sich nach einer zur vorigen analogen Rechnung

$$\Delta T_2 = g \Delta T_1 = g^2 \Delta T_{\text{nf}} \quad (31)$$

ergibt, mit demselben g wie zuvor.

- Und so wird die Rückkopplungsschleife immer wieder durchlaufen, mit dem allgemeinen Ergebnis $\Delta T_n = g \Delta T_{n-1} = g^n \Delta T_{\text{nf}}$.

Insgesamt ergibt sich eine Temperaturänderung

$$\Delta T_{\text{ges}} = \Delta T_{\text{nf}} + g \Delta T_{\text{nf}} + g^2 \Delta T_{\text{nf}} + g^3 \Delta T_{\text{nf}} + \dots = \frac{\Delta T_{\text{nf}}}{1 - g}, \quad (32)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen (Summenformel der geometrische Reihe) gilt, sofern $|g| < 1$ ist. Dieses Ergebnis wird auch in der Form

$$\Delta T_{\text{ges}} = f \Delta T_{\text{nf}} \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{1 - g} \quad (33)$$

geschrieben. Die Konstante f heißt Rückkopplungsfaktor (*feedback factor*). Letztlich stellt sich also ein neuer Gleichgewichtszustand mit Temperatur $T_0 + \Delta T_{\text{ges}}$ ein.

Man kann den in (33) angegebenen Term für ΔT_{ges} auch in einem einzigen Schritt erhalten, d.h. er stellt – trotz der vielleicht künstlich erscheinenden Zerlegung des Prozesses in Einzelschritte – tatsächlich (innerhalb des linearisierten Settings, in dem Produkte der mit Δ bezeichneten Größen vernachlässigt werden) die exakte Lösung des Rückkopplungsproblems dar. Allerdings wird ohne Beachtung der geometrischen Reihe nicht deutlich, was passiert, wenn $g > 1$ ist.

Ganz ähnliche Analysen wie diese werden auch für andere Rückkopplungen im Klimasystem durchgeführt. In unserem Beispiel ist $g < 0$ und daher $g > 0$ und somit (da für realistische Zahlen auch $g < 1$ gilt) $f > 1$, d.h. die Rückkopplung ist positiv, da ein anfängliches ΔT_{nf} zu einer Änderung $\Delta T_{\text{ges}} > \Delta T_{\text{nf}}$ führt. Wie erwähnt gibt es auch negative Rückkopplungen (wie etwa die Temperaturgradient-Rückkopplung), für diese gelten (32) und (33) mit $g < 0$ und demnach $f < 1$.

Die wahrscheinlichsten Werte von g und f für die vier wichtigsten Rückkopplungen im Klimasystem, wie sie mit Computermodellen ermittelt wurden, sind (siehe Dessler (2022), Abschnitt 6.3.3):

$$g_{\text{Wasserdampf}} \approx 0.6 \quad f_{\text{Wasserdampf}} \approx 2.5 \quad (34)$$

$$g_{\text{Eis-Albedo}} \approx 0.15 \quad f_{\text{Eis-Albedo}} \approx 1.2 \quad (35)$$

$$g_{\text{Wolken}} \approx \text{zwischen } 0 \text{ und } 0.25 \quad f_{\text{Wolken}} \approx \text{zwischen } 1 \text{ und } 1.3 \quad (36)$$

$$g_{\text{lapse rate}} \approx -0.25 \quad f_{\text{lapse rate}} \approx 0.8. \quad (37)$$

(Sie sind *alle* mit Unsicherheiten behaftet, wir haben hier nur die größte Unsicherheit gekennzeichnet.) Das wirft die Frage auf, wie sich eine Kombination mehrerer unabhängiger Rückkopplungen auswirkt, die jeweils durch ein g bzw. ein f charakterisiert sind. Die Antwort: Es werden *nicht* die f 's multipliziert, sondern es werden die g 's addiert!

Wer Lust hat, mit Kanonen auf Spatzen zu schließen, kann die Aussage $\Delta T_n = (g_1 + g_2)^n \Delta T_{\text{nf}}$ für zwei unabhängige Rückkopplungen mit vollständiger Induktion beweisen:

- Induktionsanfang ($n = 1$): $\Delta T_1 = g_1 \Delta T_{\text{nf}} + g_2 \Delta T_{\text{nf}} = (g_1 + g_2) \Delta T_{\text{nf}}$
- Induktionsschritt ($n \rightarrow n + 1$):

$$\begin{aligned} \Delta T_{n+1} &= g_1 \Delta T_n + g_2 \Delta T_n = (g_1 + g_2) \Delta T_n = \\ &= (g_1 + g_2)(g_1 + g_2)^n \Delta T_{\text{nf}} = (g_1 + g_2)^{n+1} \Delta T_{\text{nf}}. \end{aligned}$$

Der gesamte Rückkopplungsfaktor ist daher in jedem einzelnen f nichtlinear. Für zwei Rückkopplungen sieht das so aus:

$$g_{\text{ges}} = g_1 + g_2 \quad \text{und} \quad f_{\text{ges}} = \frac{1}{1 - g_1 - g_2} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - f_1 f_2}. \quad (38)$$

Die obigen vier Rückkopplungen (34)–(37) kombinieren sich also in der Form

$$g_{\text{ges}} = g_{\text{Wasserdampf}} + g_{\text{Eis-Albedo}} + g_{\text{Wolken}} + g_{\text{lapse rate}} \approx 0.5 \text{ bis } 0.75. \quad (39)$$

Der Rückkopplungsfaktor der gesamten Kombination (und damit praktisch der Faktor für alle schnellen Rückkopplungen im Klimasystem der Erde) ist dann durch

$$f_{\text{ges}} = \frac{1}{1 - g_{\text{ges}}} = \frac{1}{1 - g_{\text{Wasserdampf}} - g_{\text{Eis-Albedo}} - g_{\text{Wolken}} - g_{\text{lapse rate}}} \approx 2 \text{ bis } 4 \quad (40)$$

gegeben. Eine anfängliche Temperaturänderung wird also durch Rückkopplungen verdoppelt bis vervierfacht! Diese relativ große Unsicherheit stammt vor allem aus der Unsicherheit von g_{Wolken} bzw. f_{Wolken} und erklärt, warum die Bildung und Beschaffenheit von Wolken in einem geringfügig wärmeren Klima als dem heutigen eines der ganz aktuellen Themen der Klimaforschung ist.

Das bisher Erreichte können wir so zusammenfassen: Mit dem durch

$$\lambda = f_{\text{ges}} \lambda_{\text{fn}} \quad (41)$$

definierten Klimasensitivitätsparameter, kurz Klimasensitivität³, ist die von einer äußeren Einwirkung mit Strahlungsantrieb RF verursachte, langfristige zu erwartende Temperaturänderung gegeben durch

$$\Delta T_{\text{ges}} = \lambda \text{RF}. \quad (42)$$

Während RF, wie bereits besprochen, relativ leicht zu bestimmen ist, ist λ mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet (die vor allem in *model diversity* besteht, also darin, dass verschiedene Klimamodelle unterschiedliche Vorhersagen machen). Ein mittlerer Wert für grobe Abschätzungen wäre $\lambda = 0.9 \text{ K}/(\text{W}/\text{m}^2)$.

8. Kopplung an den Ozean als Wärmereservoir

Die typischen Zeitspannen, die das Klimasystem nach einer Störung für seine Anpassung an geänderte Gegebenheiten benötigt, sind bestimmt durch die thermische Trägheit des Klimasystems. Sie können grob abgeschätzt werden, indem der Ozean als wichtigstes Wärmereservoir in die Überlegungen einbezogen wird. (Im Vergleich zu ihm spielt die Speicherung von Wärmeenergie in der festen Oberfläche der Kontinente oder in der Atmosphäre praktisch keine Rolle.)

Im einfachsten Fall wird angenommen, dass der Ozean die gleiche Temperatur T wie die Erdoberfläche und eine konstante Wärmekapazität (pro Fläche) C besitzt, d.h. dass sich bei einer Änderung der Temperatur um ΔT die im Ozean (pro Fläche) gespeicherte thermische Energie um $C\Delta T$ ändert. Da in diesem Abschnitt sogleich eine Differentialgleichung auftreten wird, schreiben wir anstelle von ΔT wie in der Physik üblich dT und die Änderung der Energie pro Fläche als CdT . Die Netto-Leistung, die das Klimasystem der Erde pro Fläche aufnimmt, ist daher gleich

$$C \frac{dT}{dt} = \mathcal{B} = \frac{1}{4}(1 - \alpha)S - \tau\sigma T^4. \quad (43)$$

Wir gehen aus von einem Gleichgewichtszustand $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$, nehmen die (zugegebenermaßen sehr grobe) Näherung an, dass die Größen (α, S, τ) konstant gleich (α_0, S_0, τ_0) bleiben, erlauben aber der Temperatur, sich mit der Zeit t zu ändern und bezeichnen mit $\theta(t)$ die Abweichung von der Gleichgewichtstemperatur, setzen also

$$T(t) = T_0 + \theta(t). \quad (44)$$

Damit wird (43) zu

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{4}(1 - \alpha_0)S_0 - \tau_0\sigma T_0^4 - 4\tau_0\sigma T_0^3\theta(t), \quad (45)$$

³ In der Literatur wird die langfristige Temperaturerhöhung, die eine Verdoppelung der CO_2 -Konzentration bewirkt, als Gleichgewichts-Klimasensitivität (*equilibrium climate sensitivity*) bezeichnet. Obwohl diese beiden so ähnlich bezeichneten Größen auf den ersten Blick ganz unterschiedliche Bedeutungen haben, ist ihr Zusammenhang so einfach, dass die eine für die andere stehen kann. Überlegen Sie mit Hilfe der in diesem Text gegebenen Informationen, wie man sie ineinander umrechnet!

also, unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingung $\frac{1}{4}(1 - \alpha_0)S_0 - \tau_0\sigma T_0^4 = 0$, zu

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = -4\tau_0\sigma T_0^3 \theta(t), \quad (46)$$

was mit (19) die Form

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_{\text{nf}}C} \theta(t) \quad (47)$$

annimmt. Es lässt sich zeigen (versuchen Sie es!), dass die Berücksichtigung der Rückkopplungen auf

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_C} \theta(t) \quad (48)$$

führt. Diese Beziehung gilt in der Nähe des Gleichgewichtszustands $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$. Ihre allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\theta(t) = \theta(0) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_C}\right). \quad (49)$$

Für $t \rightarrow \infty$ strebt somit $\theta(t)$ gegen 0 und $T(t)$ gegen T_0 . In diesem Modell hat $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$ also die Bedeutung des Gleichgewichtszustands in der fernen Zukunft. Es kann für zweierlei Situationen benutzt werden:

- Ist $\theta(0) < 0$, so findet eine Erwärmung statt. Das entspricht der Situation, dass die Temperatur zunächst kleiner als T_0 war, aber nach einer äußeren Einwirkung die geänderten Werte (α_0, S_0, τ_0) zu dem höheren Temperaturniveau T_0 gehören. Auf den gegenwärtigen Klimawandel bezogen, entspräche das etwa dem Szenario, dass eine vergrößerte CO_2 -Konzentration vorliegt (und auf lange Sicht erhalten bleibt) und die Temperatur dementsprechend steigt.
- Ist $\theta(0) > 0$, so findet eine Abkühlung statt. Das entspricht etwa der Situation, dass nach einer Erwärmung die Parameter (α_0, S_0, τ_0) wieder Werte besitzen, die zu einem niedrigeren Temperaturniveau T_0 gehören. Auf den gegenwärtigen Klimawandel bezogen, entspräche das etwa dem (hypothetischen!) Szenario, dass die CO_2 -Konzentration auf ihren vorindustriellen Wert gefallen ist, es aber aufgrund der thermischen Trägkeit des Klimasystems dauert, bis wieder diese niedrigere Temperatur erreicht ist. Also selbst wenn auf einen Schlag alle „Klimasünden“ rückgängig gemacht werden könnten (inklusive der Entfernung des überschüssigen CO_2 aus der Atmosphäre), hält die im Ozean vorhandene Wärmeenergie die Erde noch eine Zeitlang warm – *warming in the pipeline!*

In beiden Fällen ist die Zeitkonstante, die in (49) auftritt, durch

$$\Delta T_{\text{Wärmereservoir}} = \lambda_C \quad (50)$$

gegeben. Sie stellt die Größenordnung der Zeitspanne einer merklichen Änderung (die *e-fold time*) dar.

Der Wert dieser Zeitkonstante hängt empfindlich von C und damit von der veranschlagten Tiefe des Ozeans ab. Hier werden die Dinge kompliziert, da der Wärmeaustausch zwischen Ozeanschichten unterschiedlicher Tiefe und mit der Atmosphäre ebenfalls seine eigenen Zeitkonstanten mitbringt. Die sogenannte Mischungsschicht (bis in eine Tiefe von etwa 100m) tauscht durch Wind und Wellen relativ zügig Wärme mit der Atmosphäre aus. Mit ein bisschen Physik, siehe Embacher (2024a), Abschnitt 10, kann die Wärmekapazität dieser Schicht berechnet werden, und es ergibt sich

$$\Delta T_{\text{Wärmereservoir}} \approx 10 \text{ Jahre.} \quad (51)$$

Es spielen aber auch die anderen Schichten des Ozeans mit. Für den oberen Ozean (bis in eine Tiefe von etwa 700m) berechnet man $\Delta T_{\text{Wärmereservoir}} \approx 50 \text{ Jahre}$, und für den gesamten Ozean (mit seiner mittleren

Tiefe von 4 km) ergibt sich $\Delta T_{\text{Wärmereservoir}} \approx 300$ Jahre. Da der Wärmeaustausch dieser unteren Ozeanschichten mit den oberen Schichten und mit der Atmosphäre seine Zeit braucht, sind die tatsächlichen Zeitkonstanten für die Klimaantwort noch größer.

Unter dem Strich werden alle diese Zeitkonstanten beitragen. Es lässt sich also festhalten, dass jene Zeitspannen für den Klimawandel, die von der thermischen Trägheit des Klimasystems herrühren, im Bereich Jahrzehnte bis Jahrhunderte liegen.

Anhang: Verbessertes Modell

Das auf dem Strahlungsbudget in der Form (7) beruhende, bisher beschriebene Modell mit den unabhängigen Variablen α , S , τ und T ist meines Erachtens das einfachste, das (i) dem atmosphärischen Treibhauseffekt eine zentrale Stellung einräumt, (ii) es erlaubt, den Strahlungsantrieb und die Klimasensitivität (ohne und mit Rückkopplungen) als Grundkonzepte zur Beschreibung von Klimaänderungen einzuführen, zu berechnen und zu diskutieren, sodass (iii) die damit erzielten quantitativen Ergebnisse nicht allzusehr von den tatsächlichen Werten abweichen. Allerdings ist der Treibhauseffekt in diesem Modell nur durch seine Auswirkung charakterisiert, nämlich dass die Erdoberfläche mehr Wärmestrahlung emittiert als die Erde als Ganzes an den Weltraum abgibt. Die eigentliche Physik des Treibhauseffekts müsste diese Auswirkung auf das Vorhandensein von Treibhausgasen zurückführen. Ein Schritt in diese Richtung – und damit eine Verbesserung der zugrundeliegenden Modellvorstellungen – besteht darin, mit der Emissionshöhe und der effektiven Temperatur zwei neue Größen in den Blick zu nehmen.

Die Temperatur innerhalb der für Wetterphänomene relevanten Troposphäre (die im Mittel bis in eine Höhe von 12 km reicht) nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar näherungsweise mit konstanter Änderungsrate $-\Gamma$. (Inversionswetterlagen bilden Ausnahmen, die global aber nicht sehr stark ins Gewicht fallen.) Γ , bis auf das Vorzeichen der Temperaturgradient (*lapse rate*), hängt nur von der Luftfeuchtigkeit ab und ist in trockener Luft durch $\Gamma = g/c_p = 10 \text{ K/km}$ gegeben (wobei c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck ist). In feuchter Luft ist Γ kleiner, da bei der Kondensation von Wasserdampf latente Wärme freigesetzt wird. Der für die Erde mittlere Wert von Γ liegt bei etwa 6.5 K/km .

Die effektive Temperatur T_{eff} ist definiert durch

$$\tau T^4 = T_{\text{eff}}^4. \quad (52)$$

Mit ihrer Hilfe nimmt die globale Strahlungsbilanzgleichung (5) dieselbe Form an wie (1), die Bilanzgleichung für einen atmosphärelosen Planeten, allerdings mit T_{eff} statt T . Die effektive Temperatur ist jene Temperatur, die die Oberfläche einer atmosphärelosen Erde mit derselben langwelligen Strahlungsleistung wie die tatsächliche Erde haben müsste. Ihr Zahlenwert ist uns bereits aus Abschnitt 1 bekannt: $T_{\text{eff}} = 255 \text{ K} = -19^\circ\text{C}$. Man kann sich T_{eff} grob als Temperatur jener Atmosphärenschichten vorstellen, aus denen die Wärmestrahlung, die an den Weltraum abgegeben wird, vorwiegend stammt. Die entsprechende Höhe z_{eff} über der Erdoberfläche wird Emissionshöhe (*emission level* oder *emission height*) genannt. Um uns von ihr ein Bild zu machen, stellen wir uns vor, auf einer Bergwanderung hängt einige 100 Meter entfernt eine Nebelwolke. Man kann nicht durch sie hindurchsehen, aber Objekte, die nicht sehr tief innerhalb der Wolke liegen, sind noch sichtbar. Man bekommt dann eine Vorstellung davon, „wie tief“ man in die Wolke „hineinsehen“ kann. Ganz analog könnten wir von oben in die Atmosphäre blicken – aber mit Augen, die nur Wärmestrahlung sehen (oder mit einer Infrarot-Kamera). z_{eff} ist dann die Höhe, ab der die Luft aufgrund der Absorption und Emission von Wärmestrahlung, von oben betrachtet, undurchsichtig wird. (Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der optischen Tiefe oder optischen Dicke.) Andererseits ist z_{eff} jene (mittlere) Höhe, in der die Temperatur der Atmosphäre gleich T_{eff} ist. Daraus ergibt sich die Beziehung

$$T_{\text{eff}} = T - \Gamma z_{\text{eff}} \quad (53)$$

(mit $T =$ Temperatur der Erdoberfläche), die wir nutzen können, um $z_{\text{eff}} = 5 \text{ km}$ für das heutige Klima

zu berechnen. Aus (52) und (53) folgt sofort, dass

$$\tau = \left(1 - \frac{\Gamma z_{\text{eff}}}{T}\right)^4. \quad (54)$$

Die Beziehungen (52), (53) und (54) können innerhalb des bisher skizzierten Modells genutzt werden, um Informationen über T_{eff} , Γ und z_{eff} zu erlangen. Die entscheidende Frage ist allerdings, ob in der Formel (7) für \mathcal{B}

- (α, S, τ, T) als unabhängige Variable betrachtet werden (altes Modell),
- oder ob $(\alpha, S, z_{\text{eff}}, \Gamma, T)$ als unabhängige Variable betrachtet werden (verbessertes Modell).

Das verbesserte Modell besteht also darin, im Strahlungsbudget τ mittels (54) durch Γ und z_{eff} auszu-drücken, also \mathcal{B} in der Form

$$\mathcal{B} = \frac{1}{4}(1 - \alpha)S - \sigma(T - \Gamma z_{\text{eff}})^4, \quad (55)$$

anzuschreiben. Das neue Maß für die Stärke des Treibhauseffekts ist nun nicht mehr der Transmissionsgrad τ , sondern die Emissionshöhe z_{eff} . Das ist physikalisch gut motiviert, da z_{eff} nur von der Verteilung, Konzentration und Beschaffenheit der Treibhausgase abhängt und in Prozessen, in denen sich die Treibhausgase nicht ändern, konstant bleibt. Das bedeutet:

- Für die Analyse von Gleichgewichtszuständen sind das alte und das verbesserte Modell gleichwertig.
- Für die Berechnung von Strahlungsantrieben (die bei konstanter Temperatur durchgeführt werden) sind das alte und das verbesserte Modell gleichwertig.
- Für die Vorhersage von Temperaturänderungen ergeben sich Unterschiede. Gemäß (54) ist τ bei festgehaltenem Γ und z_{eff} nicht konstant, da sich T (wenn auch nur wenig) ändert.

Mit dem verbesserten Modell kann man ganz analog vorgehen wie mit dem alten Modell:

- Berechnung des Strahlungsantriebs: α , S und z_{eff} dürfen sich (sprunghaft) ändern; Γ und T werden festgehalten.
- Berechnung der No-feedback-Klimasensitivität: T passt sich an; α , S , z_{eff} und Γ werden festgehalten. Im Unterschied zu (19) ergibt sich

$$\lambda_{\text{nf}} = \frac{1}{4\sigma(T_0 - \Gamma_0 z_{\text{eff},0})^3} = \frac{1}{4\sigma T_{\text{eff},0}^3} = \frac{1}{4\tau_0^{3/4} \sigma T_0^3}. \quad (56)$$

Numerisch ist $\lambda_{\text{nf}} = 0.27 \text{ K}/(\text{W}/\text{m}^2)$, was nur eine Spur kleiner ist als (20).

- Einbeziehung von Rückkopplungen: α , z_{eff} und Γ dürfen von T abhängen.

Ergo: Das verbesserte Modell enthält eine Variable mehr und ist eine Spur aufwändiger. Dass Γ als unabhängige Variable auftritt, hat den zusätzlichen Vorteil, dass auch die Temperaturgradient-Rückkopplung modelliert werden kann. λ_{nf} fällt im neuen Modell etwas kleiner aus als im alten.

Literatur

- Archer, David and Pierrehumbert, Raymond (eds.) (2013): *The Warming Papers* (Wiley-Blackwell, 2013).
- Bell, Thorsten und Walter, Oliver (2009): *Schüler modellieren den Treibhauseffekt: Unterrichtskonzept und Ergebnisse einer Erprobung in der Sekundarstufe II*, PhyDid 2/8 (2009), S. 32 – 48.
- Dessler, Andrew (2022): *Modern Climate Change* (Cambridge University Press, 2022).
- Embacher, Franz (2024a): *Klimamodelle für den Physikunterricht* (Workshop im Rahmen der VfPC-Fortbildungstagung, 27.2.2024, ungekürzte Version): https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Klima/Klimamodelle_Physikunterricht_mL.pdf.

- Embacher, Franz (2024b): Vorab unter https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Klima/Klimamodelle_Mathematikunterricht.pdf veröffentlichte Version des Vortrags vom 5.4.2024, bis auf Abschnitt 8 mit diesem Text weitgehend identisch.
- Embacher, Franz (2024c): Vortragsfolien: https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Klima/https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Klima/Klimamodelle_fuer_den_Mathematikunterricht.pptx und https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Klima/https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Klima/Klimamodelle_fuer_den_Mathematikunterricht.pdf.
- GeoSphere (Stand 2024): GeoSphere Austria Informationsportal Klimawandel (ehem. ZAMG Portal Klimawandel): <https://www.zamg.ac.at/cms/de/klima/informationsportal-klimawandel>
- IdTr (Stand 2024): Idealisiertes Treibhausmodell: https://de.wikipedia.org/wiki/Idealisiertes_Treibhausmodell
- IPCC (Stand 2024): IPCC Data Distribution Centre: <https://ipcc-data.org/>
- IPCC (Stand 2023): IPCC: Climate Change 2021. The Physical Science Basis: <https://www.ipcc.ch/report/ar6/wgl/>
- Krauss, Lawrence (2021): *The Physics of Climate Change* (Apollo, 2021).
- Manabe, Syukuro and Broccoli, Anthony (2020): *Beyond Global Warming: How Numerical Models Revealed the Secrets of Climate Change* (Princeton University Press, 2020)
- North, Gerald R. and Kim, Kwang-Yul (2017): *Energy Balance Climate Models* (Wiley-VCH, 2017)
- Portal (Stand 2024): Portal Klimawandel am Hamburger Bildungsserver: <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Klimawandel:Portal> (Hauptseite: <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Hauptseite>)
- Pierrehumbert, Raymond (2019): *Principles of Planetary Climate* (Cambridge University Press, 2019).
- Roedel, Walter und Wagner, Thomas (2017): *Physik unserer Umwelt: Die Atmosphäre* (Springer Spektrum, 2017).
- Sonnblick (Stand 2024): Sonnblick – aktuelle Daten inkl. Spurengase: <https://www.sonnblick.net/de/daten/aktuelle-messdaten/>
- Stocker, Thomas (2011): *Introduction to Climate Modelling* (Springer, 2011).

Anschrift des Verfassers

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik

Universität Wien

Oskar-Morgenstern-Platz 1

A – 1090 Wien

Österreich

franz.embacher@univie.ac.at